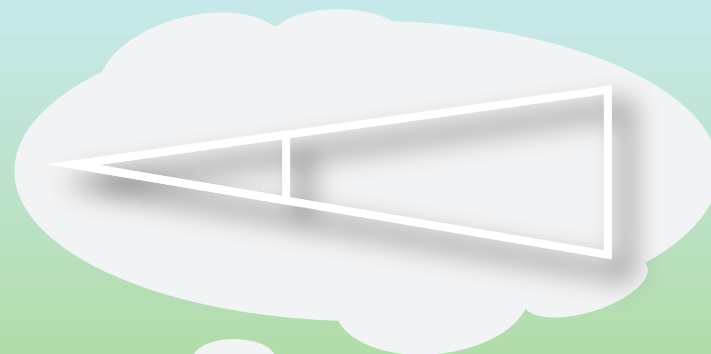


數學百子櫃

系列(二十八)



率、比與比例

教育局數學教育組編訂
政府物流服務署印

Prepared by the Mathematics Education Section,
the Education Bureau of the HKSAR
Printed by the Government Logistics Department

ISBN 978-988-8581-27-6



9 789888 581276

教育局
課程支援分部數學教育組

前言

人類文明的進步很多時和數學的發展息息相關。但數學在歷史上的發展，往往較少反映在學生在數學科的學習之中。今天在數學課本中的數學，和其表達模式，其實已經歷了千百年的演進，去蕪存菁，十分精鍊。可能亦正因為如此，學生在學習數學時往往惑於數學表達的抽象性，覺得數學難以理解而失去對數學的興趣和學習動機。

數學歷史研習小組的成立，正是希望可以透過研習數學在歷史上的發展，理清數學家如何逐步建構數學來解決當時他們需要處理的問題，以此為借鏡，發掘一些學與教策略和進路幫助學生理解數學概念所包含的意義。數學歷史研習小組的成員包括大學學者、中小學教師和教育局人員，每年按特定的主題研讀中外文獻，並在小組聚會中匯報研究成果或相關的課堂實踐經驗，最後匯集這些成果，以研討會形式供本港教師參詳。

本冊子刊登的文章，正是數學歷史研習小組舉行過的一個研討會的文本。教育局數學教育組期望這些文章可作為參考資料供教師構思相關課題的課堂活動，亦可直接作為學生讀物令學生加深對數學發展的認識和對數學的興趣。

如有任何意見或建議，歡迎致函：

九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓

教育局課程發展處

總課程發展主任（數學）收

（傳真：3426 9265 電郵：ccdoma@edb.gov.hk）

教育局課程支援分部
數學教育組

目錄

前言

第一章：比（ratio）和比例（proportion）前言	1
-------------------------------------	---

蕭文強

第二章：九章算術中的比例分配問題	16
------------------------	----

鄧廣義

第三章：從日常教學重檢分數的意義及反思教學設計	32
-------------------------------	----

曾建勳

第四章：Trigonometric Ratios and Measures of Angles - A Historical, Cultural and Pedagogical Viewpoint.....	37
--	----

CHOI WAI-FUNG, BRIAN

第五章：比（ratio）和比例（proportion）後話	50
-------------------------------------	----

蕭文強

第一章：比（ratio）和比例（proportion）前言

蕭文強
香港大學數學系

比（ratio）和比例（proportion），是重要的基本數學概念；必須承認，比和比例並不是容易（完全）弄明白的數學概念，但它們在日常生活上不時要用上，並不「離地」¹，它們跟好些小學數學課題，也有密切關聯，於日後中學數學的課題，亦需要使用到。在小學時對比和比例，即使只有一個「朦朧」的認識，也是十分有益的。

不難看到，以下兩個正方形面積之比，等於另外兩個等腰三角形面積之比，兩者皆為4（見圖 1a，1b）。

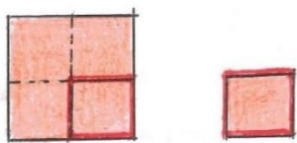


圖 1a

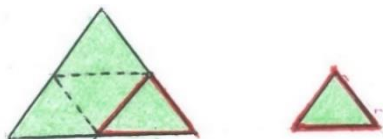


圖 1b

¹本文(前言與後話)提及的小學數學課題，乃筆者當年（二十世紀五十年代上半期）讀小學時所學的，與現行本地小學數學課程內容，並不盡同。據云現行本地小學數學課程，在高小引進比和以歸一法引入正比例概念，反比例卻不見了。至於筆者當年在小學有學過的連比和複比例，就更加不見踪影矣！（現行本地中學初中數學課程內容已包括反比例和連比的概念。）

但是，如何理解以下圓形周長與其直徑之比，等於圓形與以其半徑為邊的正方形面積之比呢？兩者皆為圓周率 π （見圖 2a，2b）。

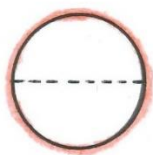


圖 2a

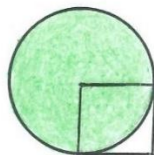


圖 2b

經常提到涉及比和比例的數學概念，還有分數（fraction）、百分比（percentage）、率（rate）和變分（variation），讓我們來看一些例子。

（1）如果 12 隻雞蛋售 20 元，3 隻要多少元？

（2）12 人共同工作需時 20 天完成，3 人共同工作需時多少天完成？（這兒作了一個沒有明言的假設，即是所有人同樣努力工作，效率相同。如果並非所有人同樣努力而效率各不相同的話，結果是怎樣呢？）

(3) 報章上有一份廣告，某超級市場售賣 AA 電池，8 支裝加送 4 支，讓你省卻 50%。你認為廣告說對了嗎？

(4) 蠟燭 A 和蠟燭 B 的長度及物料相同，A 燃燒 1 小時，B 燃燒 2 小時。同時點燃 A 和 B，隔若干時段，同時熄滅 A 和 B，如果當時一根蠟燭的長度剛好是另一根的兩倍，兩支蠟燭點燃了多長時間呢？

(5) 你知道 A3 紙張與 A4 紙張的大小關係嗎？根據這種關係，試解釋影印機放大縮小的說明：放大百分比是 141%，縮小百分比是 71%。

很多人都會讀過愛爾蘭小說家 Jonathan Swift (1667–1745) 在 1726 年出版的《格列佛遊記 [Gulliver's Travels]》，特別是關於小人國 Lilliput 和大人國 Brobdingnag 的奇幻情節。格列佛在小人國被稱為「人山」，他需要遵守為他而設的特定法規，例如第四條：「人山在小人國走路時須萬分小心，不得踐踏人民、馬匹、馬車等；且不得未經民眾同意就把他們捧到手上。」又例如第九條：「當人山確切履行上述條款後，即可獲得 1728 人份的食物和飲料，自由與皇室要人接觸，並享受我們提供的其他禮遇。」按照小說所述，格列佛身高等於 Lilliput 國民平均高度的 12 倍。小說也提到 200 名裁縫為他製作襯衫、床單和桌布，

也有 300 名廚師和他們的家人在他居所前面搭起帳篷，就近供他飲食，等等。按照人體比例計算，小說的敘述是否符合數學細節呢？再看看格列佛在大人國的所見所聞，他的身高是大人國國民平均高度的 $\frac{1}{12}$ 之一，他見到皇后一口吃下的雞腿有我們一隻火雞的九倍大，一片麵包就相當於我們的 5 片多士，一杯飲料足足有 52.5 加侖。由於格列佛常常會去書房看書，皇后派工匠為他打造了一個可移動的階梯，梯子有 25 呎高，每級階梯 50 呎寬，每當他想看書，就爬上最高一階，打開書本開始讀，他在階梯上向左走或者向右走，大概花 8 至 10 步的距離，端看那一行字的長度而定。至於翻書是滿容易的，因為書頁大概像我們的硬紙板那麼厚，最大一頁也不過是 18 或 20 呎長。他只用雙手一起翻，便輕易翻動了。這些敘述，又是否符合數學細節呢？

有一個大人國的情節，卻很不符合數學及物理計算得來的結果。事緣格列佛受皇后寵愛，視為活動玩具，卻招來皇后的侏儒弄臣的妒忌。這位心腸惡毒的侏儒，每逢碰到別人不注意的時候，便伺機向格列佛偷襲。有一次，格列佛在花園散步，照顧他的小姑娘暫時走開，侏儒看到格列佛站在一株蘋果樹下，便去使勁搖動蘋果樹，有幾枚在我們眼中有如大酒桶那般大的蘋果，打在格列佛的背上，把他摔在地上，事後格列佛說：

「還好我很幸運地沒有受傷。」但如果你按照物理定律作一點計算，便知道他必死無疑了！

有些依照比例繪畫的示意圖表，在報章和雜誌上不時出現。有一本著名的書《定量資訊的視覺展示 [The Visual Display of Quantitative Information]》(1983 年出版；2001 年第二版)，作者 Edward Tufte 在第三章中舉了很多這方面的例子，讀者不小心，容易給示意圖誤導。譬如其中一幀示意圖，刊登於 1978 年 10 月 25 日的《華盛頓郵報 [Washington Post]》，表達美國二十年的通貨膨脹狀況，從消費力反映出來。圖片展示五張形狀相似但大小不一的美國鈔票，鈔票上的頭像換成當年美國總統的頭像，下面標明了年份和括弧號內的購買力：1958 (\$ 1.00)，1963 (94¢)，1968 (83¢)，1973 (64¢)，1978 (44 ¢)，意思是說 1958 年美金一元到了 1963 年的購買力只相當於 1958 年的 94 ¢，餘此類推。單看該圖，1978 年的鈔票比較 1958 年的鈔票縮細了很多倍。然而，仔細察看，圖片上兩張鈔票形狀大小，按該兩年購買力的比例，不過那是以矩形邊長為比例。我們觀看一幀圖片，視覺上卻習慣以面積作比例。所以，取首尾兩年為例，那兩個矩形的邊長之比為 100 : 44，因此它們的面積之比為 $100^2 : 44^2$ 。如果要使兩個矩形面積之比為 100 : 44，則其邊

長之比是 $\sqrt{100} : \sqrt{44} = 10 : 6.633 \dots = 100 : 66.33 \dots$ ，即是說，1978 年那張鈔票應該比較圖示的那一張大得多！

也有一些生物學的知識，與比例計算有關，以下讓我們看兩個：

- (1) 一個體重 50 kg 的人，通常可以舉起 30 kg 的重量。一個體重 100 kg 的人，通常可以舉起多重呢？體重 (W) 與身高 (H) 的立方成正比；能舉起重量 (F) 與肌肉截面面積成正比，因此與身高 (H) 的平方成正比。因此，

$$\text{有 } \frac{W_1}{W_2} = \frac{H_1^3}{H_2^3} \text{ 和 } \frac{F_1}{F_2} = \frac{H_1^2}{H_2^2},$$

$$\text{故有 } \frac{W_1^2}{W_2^2} = \frac{F_1^3}{F_2^3}。 \text{若 } W_1 = 2W_2,$$

$$\text{則 } \frac{F_1^3}{F_2^3} = \frac{W_1^2}{W_2^2} = 4,$$

$$\text{因此 } \frac{F_1}{F_2} = \sqrt[3]{4} = 1.5874 \dots。$$

$$\text{由於 } F_2 = 30 \text{ kg},$$

$$\text{故 } F_1 = 47.62 \dots \text{ kg (但不是 } 2 \times 30 \text{ kg} = 60 \text{ kg)!}$$

(2) 一隻螞蟻通常身長 0.005 m ，它能背負 5 倍自己體重的重量。如果有一隻巨大的螞蟻身長有如一個成年人的身高（假定是 1.75 m ），它能背負起多少倍自己體重的重量呢？根據前面 (1) 的敘述， $\frac{W_1}{W_2} = \frac{H_1^3}{H_2^3}$ 和 $\frac{F_1}{F_2} = \frac{H_1^2}{H_2^2}$ 。

已知 $\frac{H_1}{H_2} = \frac{1.75}{0.005} = 350$ 和 $F_2 = 5W_2$ ，故有

$$\frac{F_1}{W_1} = \frac{350 \times 350 \times F_2}{350 \times 350 \times 350 \times W_2} = \frac{1}{350} \times \frac{F_2}{W_2} = \frac{1}{70}。$$

即是說，那隻（想像中的）巨大螞蟻不可能存在，它只能背負起自己體重的 $\frac{1}{70}$ ，連站起來也乏力！（現在，你是否可以解釋為何一隻巨大動物的身體形狀，並非是一隻細小動物的放樣呢？譬如說，一頭大象，它的身體形狀並非像是把一頭犬放樣，而是放大了的動物的四條腿超倍增大，比較一頭犬的四條腿粗壯得多。）

運用比例計算，也可以繪製看似三維世界幻象的圖畫，繪在地上，從某個角度去看，卻有如面對三維世界。例如像有一條鯊魚從行人道上面的一個洞穴跳出來（見圖 3a，類似筆者曾經於 2006 年 12 月 2 日在太古城見過的創作），或者一道瀑布，在面前一瀉而下（見圖 3b，筆者攝於黃埔花園廣場，2010 年 4 月 6 日）。



圖 3a



圖 3b

當中用到的數學計算，只是相似三角形知識（當中涉及比例的計算），加上一些透視學的基本概念吧（見圖 4）。

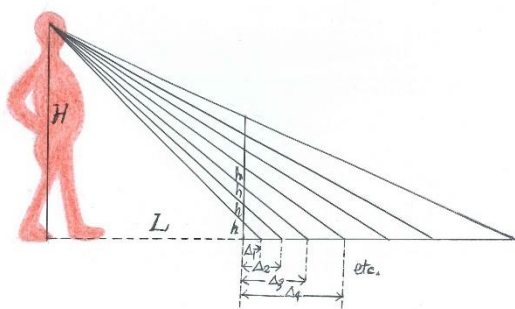


圖 4

不難計算， $\Delta_m = \frac{mhL}{H-mh}$ ，故 $d_1 = \Delta_1 = \frac{hL}{H-h}$ ， $d_m = \Delta_m - \Delta_{m-1} = \frac{hLH}{[H-(m-1)h][H-mh]}$ ， $m > 1$ 。

現在讓我們看一點中西歷史上關於比例理論的解說，對於學習小學中學數學是有補益的。運用比例計算以解決日常生活碰到的問題，古已有之。最古老的例子，見諸一份極早的古代埃及數學文獻，叫做萊因德紙草書 (Rhind Mathematical Papyrus)，是一位名叫 Ahmose 的書記於公元前 1650 年手抄自另一份更早的文本，據云書於公元前 1800 年，距今將近有 4000 年的歷史了。當中，第七十三道算題說：「用一百條十比索 (Pesu) 的麵包來換取十五比索的麵包，可以換取多少條呢？」比索是古埃及人民量度含糧穀量的單位，用一希古 (hekat，容量單位) 糧穀做成的一條麵包稱為一比索的麵包，一希古糧穀做成的兩條麵包，每條便稱為兩比索的麵包，依此類推。比索越大，麵包的含糧穀量便越低，因此一百條十比索的麵包，應該換得比一百條更多的十五比索麵包。萊因德紙草書記載的計算，是先求得一百條十比索麵包共含糧穀十希古，由這十希古糧穀可以做成一百五十條十五比索的麵包，因此，答案是一百五十條十五比索的麵包。如果你是今天一位小學生，你會怎樣計算

這道比例習作呢？還有一道較複雜的習作，是萊因德紙草書的第七十六道算題：「用一千條十比索的麵包換取相同數目的二十比索及三十比索麵包，可以換取每種麵包多少條呢？」讀者可以試自行解答。

到了公元六世紀，印度數學家的著述也有比例算題，然後過了好幾個世紀之後，西方經歷文藝復興，東學西傳，眾多西歐數學著述都討論到比例計算，更歸納為著名的「三率法（Rule of Three）」，尋且被尊稱為「金法（Regula Aurea）」，即是大家在小學時代熟悉的以交叉相乘計算四項比例的方法。

這類計算，在古代中國也見諸文獻，主要是在《九章算術》的卷二《粟米》和卷三《衰分》。率的原始概念，始於遠古「以物易物」發展起來的規則和方法。卷二開首列舉了各種糧穀在進行交換時的比例關係：「粟率五十，糲米三十，粃米二十七…」譬如第一題問：「今有粟一斗，欲為糲米幾何？」就是問，按五十斗粟換三十斗糲米的比率，一斗粟可以換多少斗糲米呢？這就是單比例問題，今天的小學生都會以「三率法」計算出來。在《九章算術》這種方法稱為「今有術」：「以所有數乘所求率為實，以所有率為法，實如法而一。」「實」就是分子，「法」就是分母，「實如法而一」就是以分母除分子求得答案。以卷二第一題換粟為糲米為例，已知 粟：糲 = 5：

3，推論出 糲米數 = (粟數 / 粟率) × 糲率，再為了避免先除後乘中遇到除不盡的麻煩，故改成 糲米數 = (糲率 × 粟數) / (粟率)，那不就是「今有術」的意思嗎？另一個寫法，即是今天的比例寫法：

糲米數：粟數 = 糲率：粟率。

「今有術」之名由來，皆因卷二的算題均以「今有」為開首，譬如第一題說：「今有粟一斗，欲為糲米幾何？」

《粟米》之前一章叫做《方田》，是計算不同形狀田畝的面積，當中要懂得分數運算，在《九章算術》佔了不少篇幅。其中為了做「約分」（即今天小學生之通分母），古代中國數學家發明了「更相減損法」（即筆者以前在小學學過的輾轉相除法），那是因為他們沒有質數的概念，也就沒有因子分解這種方法。固然，有了分數的知識，接着那一章《粟米》的比例計算，也就水到渠成了。

卷三《衰分》是卷二《粟米》的延伸，由兩個數組成的比率拓廣至多個數的比率，稱作「列衰」，即是小學數學的連比。「衰〔讀作催〕分」是「均分」的推廣，即是按比例作分配，例如《衰分》第一道算題說：「今有大夫、不更、簪裹、上造、公士、凡五人，共獵五鹿。欲以爵次分之，問各得幾何？」按照當時規矩：「爵一級曰士、二上造，三簪裹，四不更，五大夫，〔...〕二十微侯。」數目越大爵次級別越高，分配物資越多。卷三《衰分》第一題註明方法：「術曰：各置列衰，副併為法。以所分乘未併者各自為實。實如法而一，不滿法者，以法命之」。劉徽注疏這一節，解釋為：「於今有術。列衰各為所求率，副併為所有率，所分為所有數。」意思就是說「衰分」只不過是多個「今有術」（也就是西方的「三率法」）之複合吧。一般而言，是把 S 分成數份，每兩份之比是給定的值。最簡單的情形是 $S = A + B$ ， $A : B = a : b$ 。則

$$B = Ab/a, \text{ 故 } S = A(1 + b/a) = A(a + b)/a, \text{ 即 } A = \frac{Sa}{a+b};$$

$$\text{類似地, } B = \frac{Sb}{a+b}。$$

連比的情況(不妨只以三項為例)，有 $S = A + B + C$ ，

按連比例 $A : B : C = a : b : c$ 作分配，

$$\text{有 } B = \frac{Ab}{a}, \quad C = \frac{Ac}{a},$$

$$\text{故 } S = A \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right) = A \left(\frac{a+b+c}{a} \right),$$

$$\text{即 } A = \frac{Sa}{a+b+c};$$

$$\text{類似地, } B = \frac{Sb}{a+b+c}, \quad C = \frac{Sc}{a+b+c}.$$

「衰分術」寫作「各置列衰」，即是先列明 a 、 b 、 c ；「副併為法」即是把 $a+b+c$ 放於分母；「以所分乘未併者各自為實」，即是把 Sa 、 Sb 、 Sc 各放於分子。

至於反比例，《衰分》第八題也註明方法，稱為「返衰術」：「術曰：列置衰而令相乘，動者為不動者衰。」第八題說：「今有大夫、不更、簪裹、上造、公士、凡五人，共出百錢。欲令高爵出少，以次漸多，問各幾何？」。撇開不公平的元素不計（為何薪水越高，反而出錢越少呢？），這是按反比例分配 $S = A+B+C$ ，其中 $A:B:C = \frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$ （也以三項為例）。

$$\text{有 } B = \frac{Aa}{b}, \quad C = \frac{Aa}{c},$$

$$\text{故 } S = A \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \right) = A \left(\frac{bc+ac+ab}{bc} \right),$$

即 $A = \frac{Sbc}{ab+bc+ca}$ ；類似地，

$$B = \frac{Sac}{ab+bc+ca}, C = \frac{Sab}{ab+bc+ca}。$$

注意到 $A = \frac{Sbc}{ab+bc+ca} = \frac{S \times \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ ，等等，你便明白「返衰」與「衰分」的關係了。術文中所謂「動者為不動者衰」是指分母不動，每次都是一樣，分子卻每次不相同。

卷六《均輸》有更複雜的比例算題，例如第一題：「今有均輸粟，甲縣一萬戶，行道八日；乙縣九千五百戶，行道十日；丙縣一萬二千三百五十戶，行道十三日；丁縣一萬二千二百戶，行道二十日，各到輸所。凡四縣賦，當輸二十五萬斛，用車一萬乘。欲以道里遠近，戶數多少，衰出之。問粟、車各幾何？」這道題目就是小學叫做複比例的應用題，涉及多於一項按比例的分配，在第一題中，運送粟量與戶數成正比例，與行多少天成反比例，讀者可試自行解答。

卷六第十六題相當有趣，題目是：「今有客馬，日行三百里。客去忘持衣，日已三分之一，主人乃覺，持衣追及與之而還；至家視日四分之三。問：主人馬不休，日行幾何？」可以有幾個不同的解法，今天的中學生大概會利用速率知識，依題

意列方程以求解；也可以用幾何作圖解，當中涉及相似三角形知識（其實用了比例），讀者可試自行解答。至於《九章算術》，卻是以反比例計算，懂得反比例的小學生也能明白，毋需動用代數方程或者相似三角形知識，也能解決這個問題。

數學史家李繼閔 (1938－1993) 在其著作《九章算術及其劉徽注研究》(1992) 第三章指出：「中算家所考察的各種數量關係中，最重要和最基本的是比率關係。〔...〕是中算許多理論的基礎和算法的源泉。」他甚至認為古代中算家展示明確傾向，以率的概念與方法來建立統一數學理論。《隋書·律曆志》有云：「事物糅見，御之以率，則不乖其本。故幽隱之情，精微之變，可得而綜也。」由此，可見比率理論在中算之重要地位。《九章算術》成書於公元前一世紀至公元一世紀之間，卷一叫做「方田」，顧名思義是計算田地的面積，在第十八題出現比率，公元二世紀中葉劉徽注曰：「凡數相與者謂之率。」比對一下，古希臘 Elements（約成書於公元前三世紀初）卷五的界說三：「兩個同類量之間的一種大小關係叫做比（A ratio is a sort of relation in respect of size between two magnitudes of the same kind）」，是否中外心通理同呢？

第二章： 九章算術中的比例分配問題

鄧廣義
元朗商會中學

前言

「率」在《九章算術》體系裡的十分重要，比率理論是以量與量之間的關係為研究對象，是貫穿《九章算術》的一條主線，其應用廣泛展示於各篇之中，乃算法之綱紀。

分數的四則運算

中算家的分數理論以比率為基礎。在《經分術注》中劉徽給「率」下了的一個定義：凡數相與者謂之率。率者，自相與通。有分則可散，分重疊則約也。等除法實，相與率也。意指一組或多組相關的變量，按指定數量可以相通，可乘/除以同一數值(擴分/約分)，一般應約至最簡。

更相減損法是出自《九章算術》的一種求最大公約數的算法，原本是為約分而設計的。其中

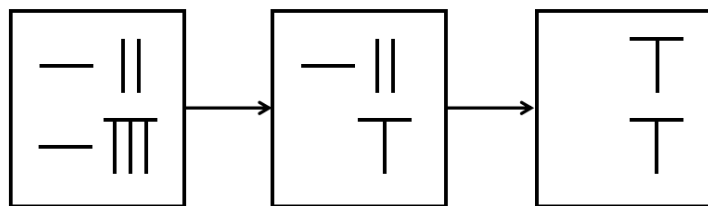
卷一方田 約分術曰：可半者半之；不可半者，副置分母、子之數，以少減多，『更相減損』，求其等也。以等數約之。

先看看一些分數四則運算的例子：

約分〔摘自：卷一方田(五)〕

今有十八分之十二。問約之得幾何？

依術於籌算中推演如下：

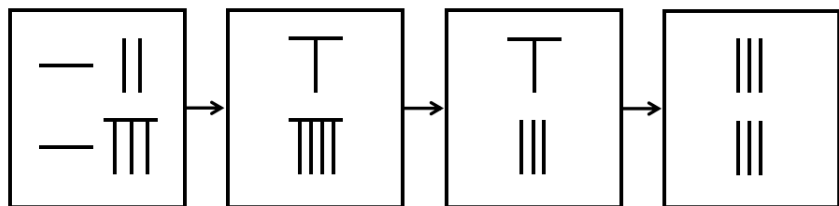


得到最大公約數 6。

$$\therefore \frac{12}{18} = \frac{12 \div 6}{18 \div 6} = \frac{2}{3}$$

劉徽的注文說明了更相減損法的原理：其所以相減者，皆等數之重疊，故以等數約之。

另一種方法是「可半者半之」：



得到最大公約數 3。

$$\therefore \frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$$

合分〔摘自：方田(七)〕

今有三分之一，五分之二。問合之得幾何？

術曰：母互乘子，并以為實，母相乘為法。

$$\therefore \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} + \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

減分〔摘自：方田(十)〕

今有九分之八，減其五分之一。問餘幾何？

術曰：母互乘子，以少減多，餘為實，母相乘為法，實如法而一。

$$\therefore \frac{8}{9} - \frac{1}{5} = \frac{8 \times 5}{9 \times 5} - \frac{1 \times 9}{5 \times 9} = \frac{40}{45} - \frac{9}{45} = \frac{31}{45}$$

經分〔摘自：方田(十八)〕

今又有三人，三分人之一，分六錢三分錢之一，四分錢之三，問人得幾何？

術曰：以人數為法，錢數為實，實如法而一。有分者通之，重有分者同而通之。

$$\begin{aligned}
& (6\frac{1}{3} + \frac{3}{4}) \div 3\frac{1}{3} \\
&= \frac{85}{12} \div \frac{10}{3} \\
&= \frac{85 \times 3}{12 \times 3} \div \frac{10 \times 12}{3 \times 12} \\
&= \frac{85 \times 3}{12 \times 10} \\
&= \frac{255}{120} \\
&= \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

先擴分到了共同 36 分之 1，單位相同無須理會共同的分母，因此解釋了分數除法顛倒相乘。

乘分〔摘自：方田(十九)〕

今有田廣七分步之四，從五分步之三。問為田幾何？

術曰：母相乘為法，子相乘為實，實如法而一。

$$\therefore \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = (\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} \times 7 \times 5) \div (7 \times 5) = \frac{4 \times 3}{7 \times 5} = \frac{12}{35}$$

先擴分再約分，因此分子乘分子，分母乘分母。

我們再來看看物物交換中產生的率概念。

《九章算術》卷二粟米列出了 20 種不同品種和質量的穀物的交換之率：

粟米之法

粟率五十

糲米三十

稗米二十七

縗米二十四

御米二十一

小麴十三半

大五十四

糲飯七十五

稗飯五十四

縗飯四十八

御飯四十二

菽、荅、麻、麥各四十五

稻六十

豉六十三

飧九十

熟菽一百三半

蘖一百七十五

基本上就是正比和連比的關係。

〔摘自：卷二粟米(一)〕

今有粟一斗，欲為糲米。問得幾何？

(1 斗 = 10 升)

今有術曰：以所有數乘所求率為實，以所有率為法，實如法而一。

$$\text{所求數} = \frac{\text{所求率} \times \text{所有數}}{\text{所有率}} = \frac{30 \times 10 \text{ 升}}{50} = 6 \text{ 升}$$

由於這類問題總是從「今有」開始發問，所以稱之為今有術；直到公元七世紀初，印度才出現三率法；文藝復興時期經阿拉伯人將三率法傳入歐洲，大受商人歡迎，並頌為「金法」。

正變〔摘自：卷三衰分(一)〕

今有大夫、不更、簪褭、上造、公士，凡五人，共獵得五鹿。
欲以爵次分之，問各得幾何？

(衰，音催，依照一定的比率遞減。)

意思就是說，五人的分配比例是 5:4:3:2:1；因此共有 $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ 份。

所以大夫應分得 $5 \times 5(\text{鹿}) \div 15 = \frac{25}{15} = 1\frac{2}{3}(\text{鹿})$ 。

其餘各人分配如下：

5	$\times 5$	25	$\div 15$	$1\frac{2}{3}$
4		20		$1\frac{1}{3}$
3		15		1
2		10		$\frac{2}{3}$
1		5		$\frac{1}{3}$

反變〔摘自：衰分(八)〕

今有大夫、不更、簪裹、上造、公士凡五人，共出百錢。欲令高爵出少，以次漸多，問各幾何？

五人的分配比例是以反比計算：1/5 : 1/4 : 1/3 : 1/2 : 1/1。首先遍乘 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ ，把比例擴大 120 倍至 24 : 30 : 40 : 60 : 120；因此共有 $24 + 30 + 40 + 60 + 120 = 274$ 份。

所以大夫應出 $24 \times 100(\text{錢}) \div 274 = 8\frac{104}{137}(\text{錢})$ 。

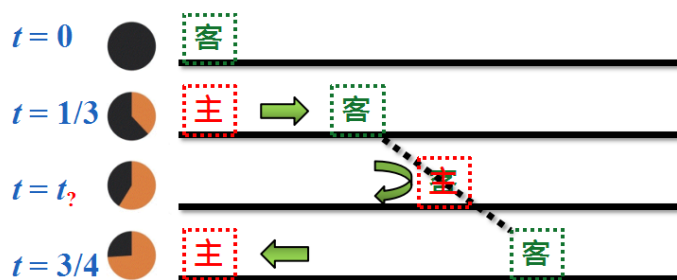
其餘各人分配如下：

1/5	$\times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$	24	$\times 100$	2400	$\div 274$	$8\frac{104}{137}$
1/4		30		3000		$10\frac{130}{137}$
1/3		40		4000		$14\frac{82}{137}$
1/2		60		6000		$21\frac{123}{137}$
1/1		120		12000		$43\frac{109}{137}$

〔 摘自： 卷六均輸(十六) 〕

今有客馬，日行三百里。客去忘持衣。日已三分之一，主人乃覺，持衣追及與之而還；主人視日四分之三。問主人馬不休，日行幾何？

姑且以圖示之：



因為主馬速率不變，主馬追及客馬需時 (日)，因此主馬追及客馬的正確時間為

$$t_? = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) \div 2 + \frac{1}{3} = \frac{5}{24} + \frac{1}{3} = \frac{13}{24} \text{ 日}$$

$$\text{距離} = \frac{13}{24} \times 300 = 162\frac{1}{2} \text{ 里}$$

$$\text{速度} = \frac{162\frac{1}{2}}{\frac{5}{24}} = 780 \text{ 里/日}$$

〔摘自：均輸(二十六) 五渠注池〕

今有池，五渠注之。

其一渠開之，少半日一滿；

次，一日一滿；

次，二日半一滿；

次，三日一滿；

次，五日一滿。

今皆決之，問幾何日滿池？

首先將五渠之率皆轉為一日之數：

渠	日	滿
A	1	3
B	1	1
C	5	2
D	3	1
E	5	1



日	滿
1	3
1	1
1	2/5
1	1/3
1	1/5

因此，五渠1日共注 $3+1+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{74}{15}$ (池)。

$$\therefore 1 \div \frac{74}{15} = \frac{15}{74} \text{ 日}$$

另外一種解法如下：

首先遍乘日數 $1*1*5*3*5 = 75$ ，將五渠之率皆轉為 75 日之數：

因此，五渠 75 日共注 $225 + 75 + 30 + 25 + 15 = 370$ 池。

$$\therefore \frac{75}{370} = \frac{15}{74} \text{日}$$

渠	日	滿		日	滿
A	1	3		75	225
B	1	1	$1*1*5*3*5 = 75$	75	75
C	5	2	→	75	30
D	3	1		75	25
E	5	1		75	15

聯變〔摘自：均輸(一)〕

今有均輸粟：

甲縣一萬戶，行道八日；

乙縣九千五百戶，行道十日；

丙縣一萬二千三百五十戶，行道十三日；

丁縣一萬二千二百戶，行道二十日，各到輸所。

凡四縣賦當輸二十五萬斛，用車一萬乘。欲以道里遠近、戶數多少衰出之。問粟、車各幾何？

這道其實是一條練習題，各縣並不須要支付粟米的費用，只須計算各縣應該出車多少。首先考慮公平原則：無論身處何縣，每戶行道日數應當相同。因此，各縣出車之數是一種聯變：正比縣戶數而反比行道日數。

縣	戶數		出車率		約簡		遍乘		遍除		上下輩之
甲	10000	÷ 8	1250		125		1250000		3324.47		3324
乙	9500	÷ 10	950		95	×10000	950000	÷ 376	2526.60	微調	2527
丙	12350	÷ 13	950		95		950000		2526.60		2527
丁	12200	÷ 20	610		61		610000		1622.34		1622

首先將各縣戶數除以行道日數，得出車之率，約簡之後得 125+95+95+61=376(份)；將比例遍乘 10000 車再除以 376 份，微調之後得出車之數。

部分變〔摘自：均輸(四) 六縣賦粟〕

今有均賦粟：

甲縣四萬二千算，粟一斛二十，自輸其縣；

乙縣三萬四千二百七十二算，粟一斛一十八，傭價一日一十錢，到輸所七十里；

丙縣一萬九千三百二十八算，粟一斛一十六，傭價一日五錢，到輸所一百四十里；

丁縣一萬七千七百算，粟一斛一十四，傭價一日五錢，到輸所一百七十五里；

戊縣二萬三千四十算，粟一斛一十二，傭價一日五錢，到輸所二百一十里；

己縣一萬九千一百三十六算，粟一斛一十，傭價一日五錢，到輸所二百八十里。

凡六縣賦粟六萬斛，皆輸甲縣。六人共車，車載二十五斛，重車日行五十里，空車日行七十里，載輸之間各一日。粟有貴賤，傭各別價，以算出錢，令費勞等。問縣各粟幾何？

此題甚為複雜，需要計算粟價、傭價、行車日數等各種物流費用，讀者可嘗試自行解題。

(答案：各縣出粟分別為

$18947\frac{49}{133}$, $10827\frac{9}{133}$, $7218\frac{6}{133}$, $6766\frac{122}{133}$, $9022\frac{74}{133}$, $7218\frac{6}{133}$ 斛。)

參考書籍

- [1] 李繼閔，《九章算術》及其劉徽注研究，九章出版社，1971。
- [2] 郭書春，《九章算術》譯注，上海古籍出版社，2009。
- [3] 吳文俊，中國數學史大系卷三，北京師範大學出版社，1998。
- [4] 《九章算術》網上版
<http://www.mathsgreat.com/CMhist/jiuzhang/jiuzhang.html>
- [5] 《九章算術》網上版 <http://ctext.org/nine-chapters/zh>

作者電郵：

tangkwongyee@yahoo.com.hk

第三章：從日常教學重檢分數的意義及反思 教學設計

曾建勳
民生書院小學

引言

分數，一直給老師、學生一種複雜、抽象的課題。國內、國外都相信對分數有清晰及深層的理解，是基礎數學課程中應該要建立的其中一種重要數學技能。長遠而言，認識好分數是接觸代數、幾何或其他數學領域的鑰匙。這篇分享並不是一篇學術論文，沒有甚麼新發現，相反希望透過個人的教學經歷分享及反思，讓大家重新對分數嘗味，重新思考如何設計，給學生一種新鮮的感覺。

分數是甚麼？

在小學數學學習的課程中，學生在三年級開始接觸分數，常見引入的做法是老師是會用切薄餅（圓形）作引入，帶出均分的概念，似乎是一個典型的處理手法。從歷史角度去看分數的出現，它的由來大致可以追溯到三千多年前古埃及在阿默斯紙草卷中出現的分式，草卷清晰展示了分數已經是一種記數法和演算法。當時古埃及人仍未懂得如何表示整數的一部份，

他們就創造了以「1」做分子的『單位分數』作為一種的特殊符號。文獻亦顯示，分數在中國出現的時間大約在 2000 多年之前，時間大約在秦、漢時期，但當時的分數表達方式和今天的分數截然不同。今天的分數表達大致由阿拉伯人發明的分數線而確立。從典籍去追尋，幾乎可以肯定的中國是最早使用分數的國家，例如在《左傳》春秋戰國時期，諸侯的城池的大小分別不可以超過周國的 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{9}$ 。另外，魏晉南北時期劉徽所撰寫的《九章算術》中的第一章《方田》亦有提及分數的四則混算。

分數的學與教

如上文所述，學生對分數的意識是一種均分物件的表達式，能力較高的學生會嘗試將除式連繫起來，扣上關係。簡單的一個例子：一個餅，均分給四位小朋友，每人可得餅多少？處理這個問題衍生了一個比較複雜的情況，這就是『單位』。如果老師提問是每人可得餅多少「件」，答案就截然不同了，這是我希望日後可以再為大家多一點分享『單位教學』的重要性。在這個問題上，老師的重心是學生可以回應每人可得多少「個」，簡言之，即期望學生能以分數表示。不過，大家有沒有想過，你心目中的 $\frac{1}{4}$ 和我心目中的 $\frac{1}{4}$ 是否相同嗎？在日常學與教的工作，我們都習慣用分物去介紹分數的概念，往往可

能忽視了分數本質上的『相對性』。我再多一個簡單例子說明，某班有學生28位，女生人數是全班的 $\frac{1}{4}$ ，這班有女生多少位？相信情況十分清晰闡釋，日常生活中我們粗疏地處理分數的情況，大家細味我上述提及的『單位教學』便會明白，『單位』的取決正正是我們所論述的「部分-整體的比較」（Part-Whole comparison）。

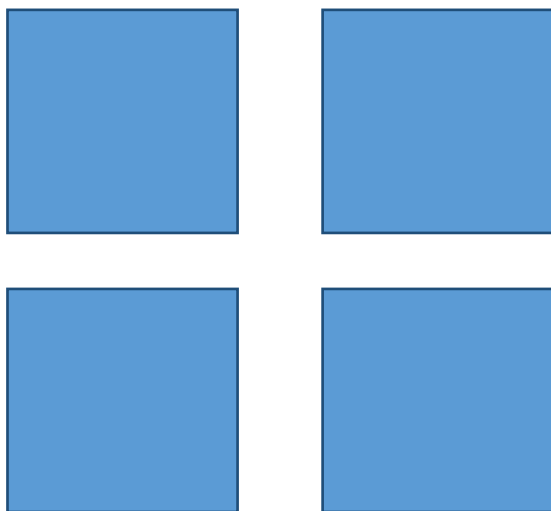
比例推理/理解（Proportional Reasoning & Thinking）能力、乘法思維（Multiplicative Thinking）與有理數（Rational Numbers）學習

比例推理對於分數、有理數的概念建立是十分重要，日常生活中有好多情境都反映出學童和成年人都不能有效利用比例做推理。比例推理是一個不錯的指標去檢測學生能否透徹理解有理數這個概念和乘法思維。在基礎的數學學習中，乘法被安排在學習加減法之後，老師在教授乘法時大多會利用『連加法』作為導入的平台，如 $2 \times 4 = 2 + 2 + 2 + 2$ 或 $4 \times 2 = 4 + 4$ 等，這樣的處理並不關係對與錯的，但『倍』的味道不太強烈，正是往往忽略了『乘法思維』的重要性。乘法思維是整數和小數的相對大小，理解“大一倍”，“小一倍”、“多一倍”和

“少一倍”，並用這種思維來解釋之間的關係乘法、除法、分數、因數、倍數和乘積。

『單位』學習和分數的關係

對於好多人來說，不論成年人或小學生，處理分數和其運算有着無比的困難。在日常的教學或學習中，『1』經常被解說為一個『整體』，例如：一個完整的餅，『1』被泛指『單一物體』。分數中『1』這個單位本質可以指多於一件物件的『複合單位』。



一個整體 - 『1』

事實上，學生好多時會直觀地覺得，分數只是表示一個唯一的值。如果『1』是指一個餅， $\frac{3}{5}$ 意思是一個餅五等分中的三份；但如果『1』是指五個餅， $\frac{3}{5}$ 表示的值就完全不同了，即是三個餅。

在平日的教學中，教科書和老師習以為常都會和學生這樣表示，當分母相同，分子相加便得出答案，但 $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ 是否真的等於 $\frac{4}{5}$ ？學生往往只會牢牢記着分數加、減法的運算法則，沒有清楚大膽瞭解背後『1』的假設。老師處理這類型的習題時，可以不妨從不同的情境出發，讓學生有明白如果分數背後代表的『1』是不一樣的時候，對應的值亦不能比較，便明白分數加/減法是有一個假設的。

第四章：Trigonometric Ratios and Measures of Angles - A Historical, Cultural and Pedagogical Viewpoint

CHOI Wai-fung, Brian

1. Introduction: Daily Teaching Viewpoint of Trigonometric Ratios

Before learning trigonometric ratios, students have learned the relationship among angles (such as angle sum of triangle), or relationship among sides (such as Pythagoras' Theorem). However, apart from equal base angles of isosceles triangles, it seems that there is no relationship between sides and angles. The introduction of Trigonometric Ratios leads to another height of junior secondary Mathematics by combining sides and angles together.

2. Explaining the Concept in Mathematics Textbook

This chapter is usually taught in F.2, after students learning similar triangles. Various textbooks introduce the concept of trigonometric ratios in the following ways:

- (i) Define the terminology of right-angled triangles (adjacent side, opposite side, hypotenuse)
- (ii) Give several similar triangles, ask students to calculate the ratio of certain sides.
- (iii) Conclude that the ratios are constant.

Some textbooks may add daily life applications, e.g. find the length of a ribbon of coloured flags, the height of a mountain etc.

All the above examples start from particular cases, and then generalize them to all right-angled triangles. Such practice should not be criticized too much at junior secondary level in view of transition of students' learning in Geometry from intuition to deduction. Yet, the learning outcome is not reached. Students do not have a way to explore or to understand why we need to consider the ratios of sides given in the "Activity", nor they can figure out why ratios of some sides are chosen in a particular way. For instance, instead of choosing opposite side to hypotenuse, also known as $\sin \theta$, why not reversing the order which gives rise to $\csc \theta$. It would be more beneficial to students if certain attention is paid to the historical development, despite of the tight teaching schedule every frontline teacher has to face.

Prior to looking at the historical origin of trigonometric ratios, educators may lead to a more deductive approach within the framework of junior form geometry. The following worksheet is used to introduce the chapter by pre-requisite knowledge, namely similar triangles and ratios of corresponding sides.

3. Introducing the Concept in a General Setting

Ratio of Sides of a Right-Angled Triangle

The figure shows $\triangle ADE$, where $\angle ADE = 90^\circ$. B and C are 2 points on AD and AE respectively so that $\angle ABC = 90^\circ$.

(a) Prove that $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

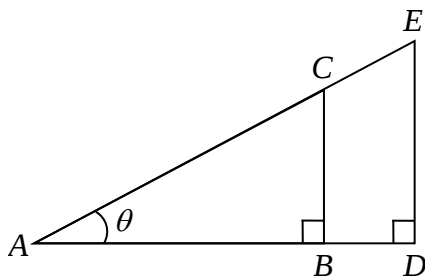
In $\triangle ABC$ & $\triangle ADE$,

$$\angle ABC = 90^\circ = \angle ADE \quad (\text{given})$$

$$\angle CAB = \theta = \angle EAD \quad (\text{common})$$

$$\angle ACB + \theta + 90^\circ = 180^\circ \quad (\angle \text{sum of } \triangle)$$

$$\angle AED + \theta + 90^\circ = 180^\circ \quad (\angle \text{sum of } \triangle)$$

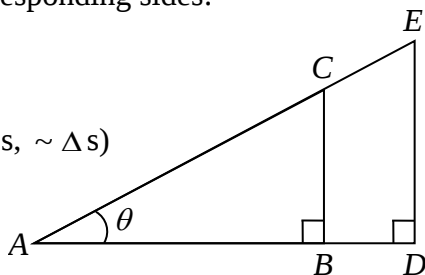


$$\therefore \angle ACB = \angle AED$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE \quad (\text{AAA})$$

(b) Hence we have the ratio of corresponding sides:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} \quad (\text{corr. sides, } \sim \triangle \text{s})$$



(c) If we rearrange the results in (b), we have

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \quad \frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}$$

(d) We can see that as the 2 right-angled $\triangle ABC$ & $\triangle ADE$ have the same angle θ , the ratio of lengths of sides are the same. These ratios are called **trigonometric ratios**. They are given the following names:

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC}, \cos \theta = \frac{AB}{AC} \text{ and } \tan \theta = \frac{DE}{AD}.$$

4. Evaluation of the Approach

Students can fully understand parts (a) & (b). However, they can't see why we have to rearrange the terms in (b) to obtain some equal ratios, nor the implications of the results in (c). Indeed, the constant ratios imply that no matter the size of a right-angled triangle, one of the acute angles can determine the ratios of all the sides. Some students seem to understand, but simply accept or memorize the fact (actually the formula), and then use calculator to solve problems with satisfaction.

It is not easy for the students to see this idea until trigonometry of arbitrary angle is introduced. In that case, sine, cosine and tangent are no longer ratios of lengths of sides, but in a more general setting. They are ratios of x , y -coordinates of a point P and distance OP .

Despite of all the difficulties, teachers may attempt other methods in the introduction stage. To cater for learning diversity, geometric software could be adopted in which students can drag certain points in the figure and “visualise” the ratio instantly. Alternatively, teachers may start with an equilateral triangle and divide it by an axis of symmetry. It is both intuitively and deductively that the ratio of adjacent side and hypotenuse is $1:2$, regardless of the

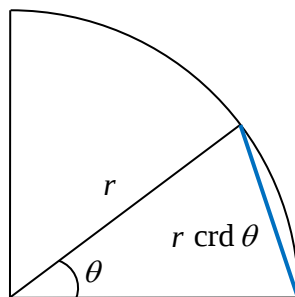
size of the triangle drawn. It acts as a natural transition for trigonometric ratios of special angles of 30° , 45° and 60° .

Doubtless to say, all these measures take part of the lesson time say 20 to 30 minutes. Yet a deeper understanding at the beginning of the chapter may remove the obstacles of students' learning and teachers' teaching not only in this particular chapter, but also the journey of trigonometry in large and the perception of mathematics in broad.

5. Historical Development of Trigonometric Ratios

The ancient Egyptians and Babylonians had known of theorems on the ratios of the sides of similar triangles for many centuries. However, as pre-Hellenic societies lacked the concept of an angle measure, they were limited to studying the sides of triangles instead.

Ancient Greek and Hellenistic mathematicians made use of the chord. Given a circle and an arc on the circle, the chord is the line that subtends the arc. The perpendicular bisector of a chord passes through the centre of the circle



and bisects the angle. In modern terms, the “chord” function is equivalent to sine ratio in the following way:

$$\text{chord } \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

Hipparchus of Nicaea (c.190–c.120 B.C.) was recognized as the first mathematician and astronomer to possess a trigonometric table. As a glimpse of his method, he divided the circumference into 360 degrees, and a diameter of the circle into 120 parts. Each part of the circumference and the diameter is further divided into 60 parts, so on and so forth. This is the Babylonians system of Sexagesimal fractions. He tabulated values for the chord function, with an increment of angle being 7.5° . His work was extended by Claudius Ptolemy (c.100–c.170 AD) in his book *Almagest* Book I, Chapter XI.

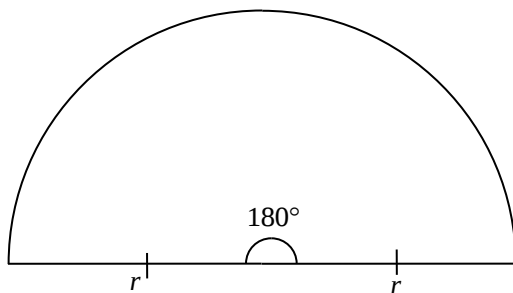
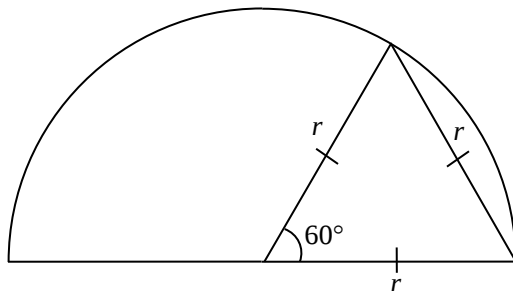
It is noteworthy that the use of trigonometric ratios in that era emerges from the studies of astronomy in which calculations of angles and distances in a spherical setting rather than plane geometry. Scientists were particularly interested in the motions of stellar objects, time recoding calendar reckoning and navigation. In other words, the studies of trigonometric ratios is never a purely mathematical approach, but rather a real life demand in solving practical problems. With such background in mind, students could appreciate the role of

Mathematics in STEM education, as well as a holistic view of various subjects including world history and geography.

6. Definition of Angle

The discussion of arc lengths and areas of sectors depend heavily on the following concept: the ratio of arc lengths and the ratio of areas of sectors are both equal to the ratio of angles subtended at the centre. It is a very intuitive idea, and students usually do not have any problem in understanding even the “Activity” in textbook start with dividing a circle into 2, 4, 8, ... parts.

Yet, such concept is not obvious when we come to the length of chords. It can be explained by a simple example. Consider an equilateral triangle with side length equal to the radius of a circle. A vertex of the triangle is at the centre of the circle, while the other 2 vertices lie on the circle. Clearly the angle subtended at the centre is 60° , and the length of the chord is r . For a semicircle, the angle at the centre is 180° , but the length of the chord, i.e. the diameter is $2r$.



angle ratio = 1:3, chord ratio = 1:2

One might argue that the measure of an angle is not “straight” as opposed to the way of a chord is constructed. It sounds perfectly fine for secondary students. Nevertheless, we might have to think deeper how the way an angle is defined both qualitatively and quantitatively. Apart from just saying in a vague way of “how large” is subtended a point, do we assume the way of describing an angle by using the concept of circle, in particular a sector, part of the circumference?

Of course, we can always safely put it as a definition or an axiom in the framework of Euclidean Geometry, just as we do in constructing the grand system of rectilinear figures at the beginning of junior secondary geometry. In the Elements Book I, definition 8, “A plane angle is the inclination to one another of 2 lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line.”. It seems that the definition does not give an explicit account of whether an arc or a circle is required.

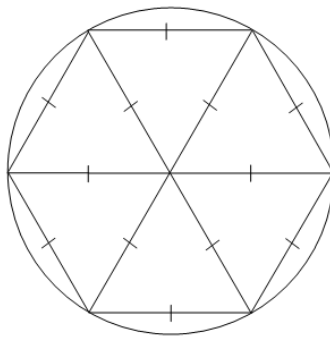
So, the question of defining an angle and a circle becomes a “chicken and egg” paradox. This looks philosophical and very likely that is too much of students’ perception in their age. Yet for us educators, a thorough understanding of the origin of an angle do helps convince ourselves, as well as our students, the natural and unnatural formula of arc length and area of sector.

7. Why 360° and other Units of Angle

The origin of setting a revolution as 360° could be more mysterious than any other mathematical development. In the practical side, 360 is close to 365 where the latter is a decent approximation of number of days in a calendar year. In addition, 360 is a multiple of 1, 2, ... , 10 except the number 7. Such a deviation from denary number

system indicates that the civilization creating such number is a big fans to Sexagesimal system. Again that is the Babylonians.

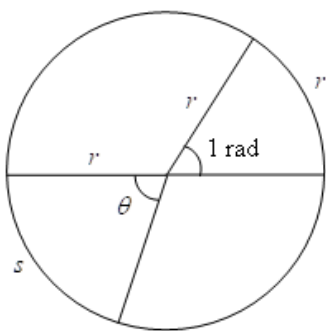
But the problem is why not using 60 or $60 \times 60 = 3600$? Inevitably we should rely on a circle again. A circle is subdivided into 6 parts which yields 6 equilateral triangles. As mentioned in previous section, such construction is a natural choice as early trigonometry is also based on chords of circle. Yet when it comes to natural, nothing is more natural than using the radius of a circle as a reference. We have seen that chords do not resemble angles nor arcs, it would be much better to select the arc length and compare it with the radius. And this is the definition of radian.



Babylonian treatment on angles

Such a new perspective was first adopted by Persian mathematician Jamshid Al-Kashi (1380–1429), whose major achievement includes the computation of the value of 2π up to 9

sexagesimal places and the Law of Cosine. It was further developed by English mathematician Roger Cotes (1682–1716), collaborating with Isaac Newton for his book the Principia. The definition of 1 “unit” of angle is the angle subtended at centre when the arc length is equal to the radius. The size of an angle is defined as 1 radian. In this regard, an angle θ subtended at the centre is simply the ratio of arc length s and the radius r . In mathematical symbol, we have $\theta = \frac{s}{r}$. Though it is equivalent to the famous counterpart $s = r\theta$, the former one gives more sense to the idea of the angle rather than claiming that the latter one saves much work in calculation, which students usually take it as the main reason but not completely convinced.



Definition of Radian

8. Concluding Remarks

This short article aims to enrich in-service teacher in a deeper understanding of development of mathematics, which usually differ greatly from the flow of school curriculum. Apart from answering potential queries from sadly a minority of enthusiastic students in mathematics, teachers may appeal it to a much broader student body who are initially not given the opportunity to view mathematics in a more societal and cultural perspective.

第五章：比（ratio）和比例（proportion）後話

蕭文強
香港大學數學系

第一章前言中我們介紹了在日常生活中碰到不少問題都用上比和比例，也介紹了這個概念在東方、西方數學史上的歷程。的確，從小學課程開始，比和比例已經出現，甚至可以說，它是一個標誌了高階思維在小學數學的路標。不少小學生開始害怕數學科，始於小學四年級或者五年級見到正比、反比、連比、複比這些概念；但有些人卻由此愛上了數學，覺得這門學科引人入勝！在上個世紀八十年代開始，數學教育界有些研究者開始注意到這個他們稱為“乘法論證 (multiplicative reasoning)”的“概念領域 (conceptive field)”的綱領，引致廣泛討論，例如見諸 Guershon Harel 與 Jere Confrey 合編的文集《乘法論證在數學學習中的進展 [The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics]》(1994) 一書。

比和比例在西方數學史上佔一重要席位。古希臘數學家已經視之為難點，引致不少很有意思的爭議，還啟發了後世現代數學分析建立的實數系理論，當中的經過，跨越了 2300 多年，

甚至延續至上一個世紀後期！以下讓我們概括地敘述一下數學史上多姿多彩的這一頁。

前面已經提到古代希臘數學家指出比（ratio）是兩個量之間的關係，見 *Elements* 卷五界說三，這不算是一個以今天尺度而言的嚴謹定義（即使甚麼叫做「量」，*Elements* 卷五中亦沒有明言，所以「比」亦是點到即止）。讓我們多看 *Elements* 卷五開首的幾個界說 (Definition)：

界說四：「當一個量幾倍以後能大於另外一個量，則說兩個量有一個比。」

界說六：「有相同比的四個量叫做成比例（proportional）的量。」

但是，什麼叫做「相同比」呢？Euclid把這個概念寫成著名的卷五界說五：「有四個量，第一量比第三量與第二量比第四量叫做有相同比，如果對第一與第三個量取任何同倍數，又對第二與第四個量取任何同倍數，而第一與第二倍量之間依次有大於、等於或小於的關係，便有第三與第四倍量之間相應的關係。(Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the

second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order.)」[全部界說之中譯，摘自藍紀正、朱恩寬，語譯《歐幾里得幾何原本》，1990年出版。]

這個界說五是否讀起來十分拗口，也很不容易明白呢？先讓我們以今天慣用的數學語言再一次敘述這個界說。設有量 A 、 B 、 C 、 D ，不妨就當它們是四個直線段的長度（為免過於囉嗦，我們以字母代表線段，也同時代表線段的長度。）要定義何謂 $A:C=B:D$ ，我們取任意正整數 m 和 n ，得另外四個量 mA （ m 個長為 A 的線段合起來的線段之長，其餘類推）、 mB 、 nC 、 nD 。比較 mA 和 nC ，也比較 mB 和 nD 。如果 mA 分別是大於、等於、或小於 nC 時， mB 相應地分別是大於、等於或小於 nD ，那麼我們便說 A 、 C 和 B 、 D 有「相同比」，記作 $A:C=B:D$ 。為什麼要作出這樣繁複的敘述以解說「相同比」呢？直白地說 $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$ （相當於 $A \times D = B \times C$ ），不是更清楚嗎？

首先，古代希臘數學家偏好以幾何思想方式進行闡述數學問題，當時他們的算術思想方式沒有那麼成熟，更遑論具備後世發展起來的符號運算法則。給定四個直線段 A 、 B 、 C 、 D 以比較它們之間的關係，古代希臘數學家便會運用幾何手段去作比較。當時的一般想法，是以為任何兩個直線段 A 和 C 都可

以用一個公共直線段 α 丈量，使 A 是 α 的 m 倍， C 是 α 的 n 倍，其中 m 和 n 都是正整數。用今天的數學語言，就是 $A = m\alpha$ ， $C = n\alpha$ 。如果對於直線段 B 和 D 也有公共直線段 β 丈量，使 B 是 β 的 m 倍， D 是 β 的 n 倍，則 A 、 B 、 C 、 D 有「相同比」。用今天的數學語言，就是 $A:C = B:D = m:n$ 。另一個看法，是把直線段 A 延長 n 倍，把直線段 C 延長 m 倍，則兩延長了的直線段都被直線段 α 丈量，各有 mn 個 α ；用今天的數學語言，就是 $nA = mC$ 了。相似地，也有 $nB = mD$ 。因此，便有 $nA \times mD = nB \times mC$ ，即 $A \times D = B \times C$ 了。

為什麼界說五不作這樣比較簡單的闡述，卻要涉及任意正整數 m 、 n ，也涉及直線段大於、等於或小於另外一個直線段呢？原來古代希臘數學家後來發現存在不可公度量，即是說，給定兩個量 A 、 C ，不一定可以找到一個（足夠小的）公共度量 α ，使 A 是 α 的 m 倍和 C 是 α 的 n 倍，其中 m 和 n 都是正整數。例如一個正方形的對角線和它的一邊就是不可公度量。用今天的數學語言，就是 $\sqrt{2}$ 不是一個有理數。這段發現不可公度量的經過，是數學史上極富戲劇性的篇章，歷經渲染。據云有某數學家因而被溺斃以「滅口」，好使真相永被埋藏，以免動搖了當時的數學根基！二十世紀初曾經有數學史家把這段經過描述為「數學史上第一次危機」，導致後世數學非常重要的發展。

真相是不能被權威單方面壓制的，真理也只能越辯越明，人類文明史上不乏這方面的事例。（有興趣知道更多這段故事，可以閱讀：梁子傑《三次數學危機與勇闖無窮大》，數學百子櫃系列#21，教育局課程發展處數學教育組，2016年。）

為什麼不可公度量的發現對當時的數學家有如晴天霹靂呢？受到最嚴重影響的是當時的比例理論，那是當時幾何學相似形理論的根基。相似三角形是中學幾何的熟知課題，它的各種判定法則，乃基於一條看似簡單的定理：兩個同高的三角形面積之比等於底邊長之比（《原本》卷六定理一）。要是任何量都是可公度量，這條定理的證明便很簡單。先把兩個三角形的底邊各自用公共度量分成 m 份和 n 份， m 和 n 是正整數。兩個三角形各自由 m 個和 n 個小三角形組成（見圖 5）

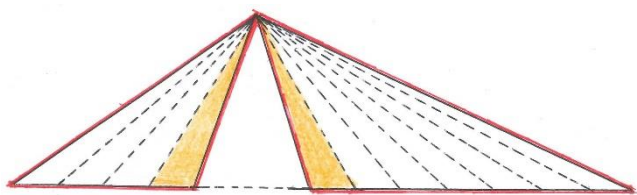


圖 5

每個小三角形面積相同，都是同高乘以同長底邊的一半，因此，兩個三角形面積之比等於底邊之比，都是 $m:n$ 。但如果

兩個三角形的底邊是不可公度量，同樣證明行不通，怎辦？沒有這個基本結果，以後的相似形理論便全盆崩潰下來！約於在公元前 370 年左右，希臘數學家 Eudoxus 補救了這個漏洞，提出了另一個「相同比」的界說（即界說五），利用它給出了上述定理的證明，挽救了「第一次數學危機」！（讀者可以試行利用界說五證明該定理，如果要看答案，可找《原本》卷六定理一看看。）

不可公度量的發現掀開了數學家對數系的研究和了解的序幕，首先只有正整數，或稱自然數（為了方便敘述，很多時我們把 0 也算在內。）然後有負整數及分數，合起來叫做有理數。不可公度量的發現使數學家意識到有理數已經不敷應用，便添上（無窮）分數小數，合起來叫做實數。但單是實數仍不夠，又添上複數，至此才大致完備，保證了任何代數方程均有根。不過，這段發現過程（也有人認為是發明過程！）卻是異常漫長且曲折，經歷二千多年。並且，那絕非是一個按部就班及線性形式的演進，而是時進時退，走了岔路又回過頭重來；更有點像螺旋式前進，至十九世紀末才算定下格局，但之後，數系仍然有其延伸，叫做超複數（hypercomplex number）。這段故事，即使極度簡化，也不可能在這兒敘述了，留待其他書本文章吧。

但是，與本課題有關連的一點，卻不能不提，那就是建立實數系的其中一個方案，由德國數學家 Richard Dedekind (1831—1916) 提出，後世稱之謂 Dedekind 分割 (Dedekind Cut)。在他的著述《數的意義 [Was sind und was sollen die Zahlen?]》(1887) 的序言，Dedekind 寫道：「如果將無理數視為兩個可測量的比率，那麼確定它的方法已經在 Euclid 有關「相同比」那個非常著名的定義中以最清晰不過的方式闡明了。」他指的就是《原本》卷五的界說五。

為什麼 Dedekind 隆重其事向 Eudoxus 提出來的想法道謝呢？因為這個想法啟迪了他，如何把數軸的“洞”填補，使數軸成為一條連續不斷的直線（或稱實數系是完備 (complete) 的）。怎樣單靠已經確立的有理數去確定那些“洞”，例如 $\sqrt{2}$ 或者 $2 + \sqrt{3}$ 、或者 π 、或者 $e + \pi$ ？Dedekind 想到的方法是利用所有大於該待確立（實）數的有理數及所有小於該待確立（實）數的有理數來確立該（實）數，用幾何眼光視之，就是把數軸切割為兩份，從切割中反而得到填補了的“洞”！這個新穎的突破觀點，與前人的想法大別，例如 Galileo Galilei (1564-1642) 認為每兩個有理數中間必定有另一個有理數，因此數軸應該是連續不斷的，所以他對數軸的“洞”（例如代表 $\sqrt{2}$ 那一點）是大惑不解。然而，正是摒棄了這一種“串連不斷”(hang together) 的想法，

把心一橫，抽刀把數軸切割成為兩份，才是恢復數軸“連續”之道！（順帶說一句，Galileo 那種描述，後世稱作數系的緊緻性 (dense)，所以有理數系是緊緻的，但不完備。）

作為習作，讀者可以試將 Eudoxus 界說五的描述化成 Dedekind 的中心思想。如果讀者要知道更詳細關於 Dedekind 分割的解說，最佳選擇的閱讀材料就是 Dedekind 在 1872 年發表的原始文本《連續性與無理數 [Stetigkeit und irrationale Zahlen]》。不難找到原文英譯本，例如：

<https://www.gutenberg.org/files/21016/21016-pdf.pdf> 或者
<https://archive.org/details/essaysintheoryof00dedeuoft/page/2/mode/2up>。

仔細讀它一遍，獲益良多，不單明白這套理論箇中細節，更難得者，是作者把他的發現過程表述無遺，是數學史古為今用的一個有力事例！

Dedekind 發表他構作實數系理論的同一年，另一位德國數學家 Georg Cantor (1845—1918) 也發表了他的一套構作實數系理論，乃基於無窮（有理數）級數概念，補足了級數收斂的不足之處，也叫做完備性。後來，在 1930 年再有另一位德國數學家 David Hilbert (1862—1943) 研究古典歐氏幾何的理論基礎，

為了補足線段或圓相交的問題，也討論了實數系的一種完備性。這三者之間有密切關係，有興趣的讀者可以參看 Casper Goffman 的文章「實數系的完備性 [Completeness of the real numbers]」，刊於 *Mathematics Magazine*, 47(1) (1974)，1—8 頁。

尾聲不妨再加一筆，在 Eudoxus 提出他的比例理論之前，有些希臘數學家基於輾轉丈量法建立了一套新理論叫做 Anthyphairesis，企圖補救「第一次數學危機」。（這種輾轉丈量法，在東方也有相同的方法，前面提過，叫做「更相減損法」，是《九章算術》第一章的重要環節。）在古希臘這方法施之於可度量（即是只考慮正整數），便是最古老也是最重要的算法，叫做歐氏算法（Euclidean Algorithm）。可惜 Anthyphairesis 在當時無功而退，其後更因為 Eudoxus 比例理論成功挽救了「第一次數學危機」而遭冷落，漸次湮沒無聞，只是在《原本》卷十留下了一些蛛絲馬跡。（如果讀者有興趣作進一步瞭解這回事，又願意花一點氣力閱讀的話，可以參看兩本學術專著：David Herbert Fowler，《柏拉圖書院的數學：一項新的重建》[The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction] (1999；第一版，1987)；Wilber Richard Knorr，《歐幾里得原本的演變》[The Evolution of the Euclidean Elements] (1975)）。但是，它導致了十六及十七世紀的連分數（Continued

fractions) 理論，更在二十世紀七十年代初因為 Ralph William Gosper 的卓越工作而奠下以連分數處理實數計算的研究基礎，在現代電腦計算上有重要的影響。難怪偉大的法國數學家 Henri Poincaré (1854-1912) 曾經說過這樣的一句話：「如果算術不與幾何結合，那麼除了整數之外，它永遠不會知悉任何其他東西。正是為了適應幾何學的要求，它才發現其他東西。」

數學百子櫃系列

- (一) 漫談數學學與教—新高中數學課程必修部分
- (二) 漫談數學學與教—新高中數學課程延伸部分
單元一
- (三) 漫談數學學與教—新高中數學課程延伸部分
單元二
- (四) 談天說地話數學
- (五) 數學的應用：區像處理—矩陣世紀
- (六) 數學的應用：投資組合及市場效率
- (七) 數學的應用：基因及蛋白的分析
- (八) 概率萬花筒
- (九) 數學中年漢的自述
- (十) 中學生統計創意寫作比賽 2009 作品集
- (十一) 從「微積分簡介」看數學觀與數學教學觀
- (十二) 2010/11 中學生統計創意寫作比賽作品集
- (十三) 2011/12 中學生統計創意寫作比賽作品集
- (十四) 數學教師不怕被學生難倒了！
— 中小學數學教師所需的數學知識
- (十五) 2012/13 中學生統計創意寫作比賽作品集
- (十六) 尺規作圖實例、題解和證明
- (十七) 摺紙與數學
- (十八) 2013/14 中學生統計創意寫作比賽作品集
- (十九) 2014/15 中學生統計創意寫作比賽作品集
- (二十) 宇宙的尺度變異定律
- (二十一) 三次數學危機與勇闖無窮大
- (二十二) 2015/16 中學生統計創意寫作比賽作品集
- (二十三) 2016/17 中學生統計創意寫作比賽作品集
- (二十四) 2017/18 中學生統計創意寫作比賽作品集
- (二十五) 面積和體積
- (二十六) 2018/19 中學生統計創意寫作比賽作品集
- (二十七) 排難解紛的數學——公平分配

作者

張家麟、黃毅英、
韓藝詩
韓藝詩、黃毅英、
張家麟
黃毅英、張家麟、
韓藝詩
梁子傑
陳漢夫
楊良河
徐國榮
蕭文強、林建
劉松基

張家麟、黃毅英

黃毅英、張僑平

孔德偉
阮華剛、譚志良

龍振強
梁子傑

蕭文強、鄧美愉、
鄧廣義、李駿宇、
吳家樂、梁子傑

羅家豪、李翠珊